Algorithmische Bioinformatik II

Abgabetermin: Freitag, den 03. Februar, 9^{00} Uhr in Moodle

Tutoraufgabe 1 (Vorbereitung bis zum 01.02.23)

Sei $Z_n \in [1 : 6]$ eine Zufallsvariable, die dem Ausgang des n-ten Wurf eines Würfels entspricht (wobei alle sechs Ausgänge gleichwahrscheinlich sind). Betrachte

$$X_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) \bmod 4.$$

a) Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette ist.

b) Bestimme das zugehörige Markov-Modell (Q, P, π).

c) Bestimme die stationäre Verteilung.

Hausaufgabe 2

Betrachte das folgende Modell $M(\theta)$ mit

$$\theta \in \Theta = \{(p_1, \ldots, p_4) \;:\; p_i \in [0, 1] \;\wedge\; p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \;\wedge\; p_1 + p_2 = p_3 + p_4\}$$

für das Werfen eines Tetraeders, wobei bei einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit p_i die Seitenfläche i unten liegt. Weiter sei die Wahrscheinlichkeit für die Seitenflächen 1 und 2 genau so groß wie für 3 und 4.

Angenommen, der Tetraeder wurde N-mal geworfen und dabei kam die Seite i genau N_i-mal unten zu liegen. Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer $\theta^*_{ML} \in \Theta$ und den Maximum-A-Posteriori-Schätzer $\theta^*_{MAP} \in \Theta$ für den Prior $f_0(p_1, p_2, p_3, p_4) = 64 \cdot p_1 \cdot p_3$.

Hausaufgabe 3

Sei $Z_n \in [0 : 1]$ eine Zufallsvariable, die dem Ausgang des n-ten Wurf einer Münze entspricht (wobei beide Seiten gleichwahrscheinlich sind). Betrachte für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$X_n = \left(\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} \cdot Z_i\right) \bmod 3.$$

a) Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette ist.

b) Bestimme das zugehörige Markov-Modell (Q, P, π).

c) Bestimme die stationäre Verteilung.