Algorithmische Bioinformatik I

Hinweise zur O-Notation

Für die Bearbeitung von Aufgaben zu den Landauschen Symbolen (O-Nottation) ist es wichtig, sich an die gegebene Definition 1.25 aus Vorlesung bzw. Skript zu halten. Insbesondere sind bei Begründungen zu O und Ω (also auch bei Θ) die in der Definition angegebenen Konstanten c und n_0 explizit anzugeben. Wir geben hier zwei Beispiele an, wie man Lösungen zu solchen Aufgaben aufschreiben sollte. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die Klausur wichtig.

Beh. 1: Für $f(n) = n^2 - 8n + 9$ gilt $f(n) \in \Theta(n^2)$

Zu zeigen ist $f(n) \in O(n^2)$ und $f(n) \in \Omega(n^2)$.

„$f(n) \in O(n^2)$“: Es gilt

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2 - 8n + 9 \\ & \text{ da } -8n + 9 \leq 0 \text{ für } n \geq 2 \\ &\leq n^2 \end{aligned}$$

Somit gilt $f(n) \leq c \cdot n^2$ für $n \geq n_0$ mit $c = 1$ und $n_0 = 2$.

„$f(n) \in \Omega(n^2)$“: Es gilt

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2 - 8n + 9 \\ & \text{ da } 9 \geq 0 \text{ für } n \geq 2 \\ &\geq n^2 - 8n \\ & \text{ da } -8n \geq -\tfrac{1}{2}n^2 \text{ für } n \geq 16 \\ &\geq n^2 - \frac{1}{2}n^2 \\ &\geq \frac{1}{2}n^2 \end{aligned}$$

Somit gilt $f(n) \geq c \cdot n^2$ für $n \geq n_0$ mit $c = \frac{1}{2}$ und $n_0 = 16 = \max\{2, 16\}$.

— **Bitte wenden!** —

Beh. 2: Für $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ gilt $f(n) \in \Theta(n^2)$

Zu zeigen ist $f(n) \in O(n^2)$ und $f(n) \in \Omega(n^2)$.

„$f(n) \in O(n^2)$“: Es gilt

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=1}^{n} i \\
&\quad \text{da } i \leq n \text{ für } n \geq 1 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

Somit gilt $f(n) \leq c \cdot n^2$ für $n \geq n_0$ mit $c = 1$ und $n_0 = 1$.

„$f(n) \in \Omega(n^2)$“: Es gilt

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=1}^{n} i \\
&\quad \text{da } 1 \leq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \text{ für } n \geq 1 \\
&\geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} i \\
&\quad \text{da } i \geq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \\
&\geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\
&= \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right) \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\
&= \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\
&\quad \text{da } \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \geq \tfrac{n}{2} \text{ für } n \geq 1 \\
&= \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \frac{n}{2} \\
&\quad \text{da } \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + 1 \geq \tfrac{n}{2} \text{ für } n \geq 1 \\
&= \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot n^2
\end{aligned}$$

Somit gilt $f(n) \geq c \cdot n^2$ für $n \geq n_0$ mit $c = \frac{1}{4}$ und $n_0 = 1$.